Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA
București

TEZĂ DE DOCTORAT

Funcții de multiplicatori Fourier generalizați, transformata Fourier α-ferăstrată, operatori de localizare

Conducător de doctorat:
Conf. univ. dr. Viorel CATANĂ

Student doctorand:
Ioana-Maria FLONDOR

2025
București

Cuprinsul tezei

Sinteza tezei

Menționez că numerotarea tuturor enunțurilor din acest rezumat coincide cu cea din teza de doctorat.

Teza de doctorat este organizată după cum urmează.

În primul capitol al acestei teze, intitulat "Funcții de multiplicatori Fourier generalizați", introducem și studiem o clasă de operatori liniari definiți pe un spațiu Hilbert separabil $\mathcal{H}$. Toate aceste rezultate au fost publicate în lucrarea originală [9], intitulată **"Generalized Fourier multipliers"**, lucrare care a fost publicată în Annals of Functional Analysis, vol. 14, article number 34, 2023, la care autoarea tezei a fost coautor alături de Viorel Catană și Horia-George Georgescu.

Fie $\mathcal{H}$ un spațiu Hilbert complex separabil dotat cu produsul scalar $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$, fie $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ o bază ortonormală pentru $\mathcal{H}$ și fie $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operator liniar mărginit. Atunci introducem operatorul liniar

$$\mathcal{F}^A_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{Z}), \quad \mathcal{F}^A_{\mathcal{H}} f = \{(Af, e_n)_{\mathcal{H}}\}_{n\in\mathbb{Z}} \tag{1}$$

pentru orice $f \in \mathcal{H}$. Acest opeartor poate fi numit „aplicație de coordonare".

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ este mulțimea tuturor operatorilor liniari mărginiti din spațiul Hilbert $\mathcal{H}$ la el însuși.

Teorema 1.1 (Teorema lui Plancherel) *Fie $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ astfel încât $A^2 = I$, unde $I : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ este operatorul identitate. Atunci, operatorul liniar $\mathcal{F}^A_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{Z})$ satisface următoarea relație*

$$\left(\mathcal{F}^A_{\mathcal{H}} f, \mathcal{F}^A_{\mathcal{H}} g\right)_{L^2(\mathbb{Z})} = (Af, Ag)_{\mathcal{H}}.$$

pentru orice $f, g \in \mathcal{H}$. Mai mult, operatorul liniar $\mathcal{F}^A_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{Z})$ este o bijecție.

Observația 1.1 Dacă presupunem în plus că A este un operator auto-adjunct, atunci rezultă că $\mathcal{F}^A_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{Z})$ este un izomorfism izometric.

Corolarul 1.1 Operatorul liniar $\left(\mathcal{F}^A_{\mathcal{H}}\right)^{-1} = \mathcal{F}^A_{\mathbb{Z}} : L^2(\mathbb{Z}) \to \mathcal{H}$ definit prin relația

$$\left(\mathcal{F}^A_{\mathcal{H}}\right)^{-1} a = \mathcal{F}^A_{\mathbb{Z}} a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n A e_n, \tag{2}$$

pentru orice șir $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ din $L^2(\mathbb{Z})$, este inversul operatorului $\mathcal{F}^A_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{Z})$.

Observația 1.2 (i) Fie $a \in L^2(\mathbb{Z})$ și fie $A^2 = I$, unde $I : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ este operatorul identitate. Atunci, conform definiției anterioare $\mathcal{F}^A_{\mathbb{Z}} = \left(\mathcal{F}^A_{\mathcal{H}}\right)^{-1} : L^2(\mathbb{Z}) \to \mathcal{H}$ obținem $\mathcal{F}^A_{\mathbb{Z}} a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n A e_n$. Prin urmare,

$$A\mathcal{F}^A_{\mathbb{Z}} a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n A^2 e_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n$$

și

$$\left(A\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^{A}a, e_m\right)_{\mathcal{H}} = a_m,$$

pentru orice $m \in \mathbb{Z}$. În plus, putem observa că

$$\left\|A\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^{A}a\right\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n\right\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2.$$

(ii) Fie $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operator liniar mărginit astfel încât $A^2 = I$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:
(j) A este un operator auto-adjunct;
(jj) A este un operator unitar;
(jjj) A este o izometrie.

Observația 1.3 Dacă considerăm $A = I : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ și $\mathcal{H} = L^2(S^1)$, unde S^1 este cercul unitar cu centrul în origine, $e_n(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ins}$, pentru $s \in S^1, n \in \mathbb{Z}$ și $\sigma \in L^\infty(\mathbb{Z})$, atunci recuperăm multiplicatorii Fourier pe S^1, care au fost studiați în lucrările [23], [24], [25], [26] și [35].

În continuare prezentăm definiția multiplicatorilor Fourier generalizați.

Definiția 1.1 Fie $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ o funcție măsurabilă pe și fie $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operator liniar mărginit. Atunci, putem defini în mod formal operatorul liniar $T_\sigma^A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ prin următoarea formulă

$$T_\sigma^A f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sigma(n)(Af, e_n)_{\mathcal{H}} A e_n. \tag{3}$$

pentru orice $f \in \mathcal{H}$.

Dacă presupunem că $A^2 = I$ unde $I : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ este operatorul identitate, folosind Teorema 1.1 și relațiile (1), (2), putem rescrie operatorul de mai sus în următorul fel

$$T_\sigma^A f = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^A(\sigma \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{H}}^A f) = \left(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^A\right)^{-1}(\sigma \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{H}}^A f), \tag{4}$$

pentru orice $f \in \mathcal{H}$.

Observăm că prima egalitate din relația (4) are loc pentru orice operator liniar mărginit A și cea de-a doua este valabilă doar dacă $A^2 = I$.

Dacă $A^2 = I$ și A este un operator auto-adjunct, atunci remarcăm că multiplicatorul Fourier generalizat T_σ^A coincide cu un multiplicator Fourier clasic pe $\mathcal{H}$, care are forma

$$T_\sigma = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sigma(n)(f, \varphi_n)_{\mathcal{H}} \varphi_n, \quad \forall f \in \mathcal{H},$$

unde $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ este o bază ortonormală pe $\mathcal{H}$.

În particular, dacă $A = I$ atunci multiplicatorul Fourier generalizat T_σ^A definit în relația (3) coincide, de asemenea, cu un multiplicator Fourier standard. Prin urmare, vom numi T_σ^A multiplicatorul Fourier generalizat pe $\mathcal{H}$ corespunzător simbolului σ, ori de câte ori seria din relația (3) este convergentă în $\mathcal{H}$.

Putem remarca și faptul că, în cazul particular $A = I$, unde $I : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ este operatorul identitate și spațiul Hilbert $\mathcal{H}$ este egal cu $L^2(S^1)$ sau cu $L^2(S)$, vom obține două exemple semnificative de multiplicatori Fourier standard introduși și studiați în lucrările [7] și [8]. Menționăm că aici S^1 reprezintă cercul unitar cu centrul în origine și $(S, \mathcal{B}, m)$ este un spațiu cu măsură finită astfel încât $L^2(S)$ este un spațiu Hilbert separabil.

În continuare suntem interesați de studierea proprietăților de mărginire, compacitate și apartenență la clasele Schatenn von-Neuman pentru această clasă de multiplicatori Fourier generalizați.

Propoziția 1.2 *Fie $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ o funcție măsurabilă astfel încât $\sigma \in L^1(\mathbb{Z})$ și fie $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operator liniar mărginit. Atunci, multiplicatorul Fourier generalizat $T_\sigma^A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ este mărginit. În plus*

$$\left\|T_\sigma^A\right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}^2 \|\sigma\|_{L^1(\mathbb{Z})}.$$

Propoziția 1.3 *Fie $\sigma \in L^\infty(\mathbb{Z})$ și fie $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operator liniar mărginit. Atunci, multiplicatorul Fourier generalizat $T_\sigma^A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ este un operator liniar mărginit și*

$$\|T_\sigma^A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}^2 \|\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{Z})}.$$

Propoziția 1.4 *Fie $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ o funcție măsurabilă și fie $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operator liniar mărginit astfel încât $A^2 = I$. Atunci $T_\sigma^A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ este un operator liniar mărginit dacă și numai dacă $\sigma \in L^\infty(\mathbb{Z})$. Mai mult, dacă $\sigma \in L^\infty(\mathbb{Z})$, atunci*

$$\|T_\sigma^A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}^2 \|\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{Z})}.$$

În plus, dacă presupunem că $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ este un operator auto-adjunct, atunci

$$\|T_\sigma^A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}^2 \|\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{Z})} = \|\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{Z})}.$$

Ultima egalitate este o consecință a Observației 1.2 (iii).

Teorema 1.3 *Fie $\sigma \in L^p(\mathbb{Z}), 1 < p < \infty$ și $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operator liniar mărginit. Atunci, există un unic operator liniar mărginit $T_\sigma^A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ astfel încât*

$$\left\|T_\sigma^A\right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}^2 \|\sigma\|_{L^p(\mathbb{Z})},$$

unde T_σ^A este dat de relația (4) pentru $f \in \mathcal{H}$ și toate funcțiile simple σ pe $\mathbb{Z}$ pentru care $\mu\{n \in \mathbb{Z} : \sigma(n) \neq 0\} < \infty$.

Observația 1.4 În plus, dacă presupunem că $A^2 = I$, rezultă că

$$\|T_\sigma^A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \|\sigma\|_{L^p(\mathbb{Z})}$$

folosind Observația 1.2 (iii).

În următoarea teoremă prezentăm un rezultat referitor la teoria spectrală a multiplicatorilor Fourier generalizați pe $\mathcal{H}$.

Teorema 1.4 *Fie $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ o funcție măsurabilă astfel încât $\sigma \in L^\infty(\mathbb{Z})$ și fie $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operator liniar mărginit astfel încât $A^2 = I$, unde $I : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ este* *operatorul identitate. Atunci, $\sigma(n)$ este o valoare proprie a lui $T_\sigma^A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ și Ae_n este funcția proprie corespunzătoare pentru orice $n \in \mathbb{Z}$. În plus, spectrul lui T_σ^A, notat $\Sigma\left(T_\sigma^A\right)$, este dat de*

$$\Sigma\left(T_\sigma^A\right) = \{\sigma(n) : n \in \mathbb{Z}\}^c,$$

unde $\{\dots\}^c$ reprezintă închiderea în $\mathbb{C}$ a șirului $\{\dots\}$.

Teorema 1.5 *Fie $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ o funcție măsurabilă astfel încât $\sigma \in L^1(\mathbb{Z})$ și fie $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operator mărginit și auto-adjunct. Atunci, multiplicatorul Fourier generalizat $T_\sigma^A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ este în clasa Schatten-von Neumann S_1 (clasa trace) și*

$$\left\|T_\sigma^A\right\|_{S_1} \leq 4\|A\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}\|\sigma\|_{L^1(\mathbb{Z})}.$$

Teorema 1.6 *Fie $\sigma \in L^p(\mathbb{Z}), 1 \leq p \leq \infty$ și fie $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operator mărginit și auto-adjunct. Atunci, multiplicatorul Fourier generalizat $T_\sigma^A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ este în clasa Schatten-von Neumann S_p și*

$$\left\|T_\sigma^A\right\|_{S_p} \leq 4^{\frac{1}{p}}\|A\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}\|\sigma\|_{L^p(\mathbb{Z})}.$$

Propoziția următoare presupune o caracterizare a multiplicatorilor Fourier generalizați compacți $T_\sigma^A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

Propoziția 1.5 *Fie $\sigma \in L^p(\mathbb{Z}), 1 \leq p < \infty$ o funcție măsurabilă și fie $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operator mărginit și auto-adjunct. Atunci multiplicatorul Fourier generalizat $T_\sigma^A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ este compact.*

Următorul rezultat prezintă formula pentru urma $tr(T_\sigma^A)$ a multiplicatorul Fourier generalizat $T_\sigma^A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ atunci când $\sigma \in L^1(\mathbb{Z})$.

Teorema 1.7 *Fie $\sigma \in L^1(\mathbb{Z})$ și fie $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operator mărginit și auto-adjunct. Atunci, multiplicatorul Fourier generalizat $T_\sigma^A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ este în clasa Schatten-von Neumann S_1 și urma sa este dată de*

$$tr(T_\sigma^A) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sigma(n)\|Ae_n\|^2_{\mathcal{H}},$$

unde $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ este o bază ortonormală.

În continuare, definim funcția de multiplicatori Fourier generalizați $F(T_\sigma^A) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, unde $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este o funcție continuă.

Definiția 1.2 *Fie $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcție continuă, fie $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ o funcție măsurabilă și fie $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operator liniar mărginit. Atunci, definim formal operatorul liniar $F(T_\sigma^A) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ prin următoarea formulă*

$$F(T_\sigma^A)f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(\sigma(n))(Af, e_n)_{\mathcal{H}}Ae_n, \quad f \in \mathcal{H},$$

unde $T_\sigma^A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *este un multiplicator Fourier generalizat pe* $\mathcal{H}$*.*

Teorema următoare prezintă condițiile necesare și suficiente pentru ca funcția de multiplicatori Fourier generalizați $F(T_\sigma^A) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ pe un spațiu Hilbert $\mathcal{H}$ să fie un operator compact.

Teorema 1.8 *Fie* $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *o funcție măsurabilă, fie* $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *o funcție continuă astfel încât* $F \circ \sigma \in L^\infty(\mathbb{Z})$ *și fie* $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *un operator mărginit și auto-adjunct astfel încât* $A^2 = I$*. Atunci,* $F(T_\sigma^A) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *este un operator compact dacă si numai dacă*

$$\lim_{|n| \to \infty} F(\sigma(n)) = 0.$$

Un rezultat referitor la valoarea absolută a funcției de multiplicatori Fourier generalizați $F(T_\sigma^A) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ este prezentat în următorul enunț.

Teorema 1.9 *Fie* $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *o funcție măsurabilă, fie* $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *un operator mărginit și auto-adjunct astfel încât* $A^2 = I$ *și fie* $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *o funcție continuă cu următoarele proprietăți:*
(i) $F \circ \sigma \in L^\infty(\mathbb{Z})$*;*
(ii) $\overline{F \circ \sigma} = F \circ \overline{\sigma}$*;*
(iii) $F(\sigma(n)) \to 0$ *când* $|n| \to \infty$*;*
(iv) $F(z_1 z_2) = F(z_1) F(z_2)$*, pentru orice* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$*.*
Atunci

$$\left| F(T_\sigma^A) \right| = F(T_{|\sigma|}^A),$$

unde $\left| F(T_\sigma^A) \right| = \left(F(T_\sigma^A)^* F(T_\sigma^A) \right)^{\frac{1}{2}}$ *reprezintă valoarea absolută a operatorului* $F(T_\sigma^A) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$*.*

Proprietățile Schatten-von Neumann ale funcției de multiplicatori Fourier generalizați $F\left(T_\sigma^A\right) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ sunt studiate în continuare.

Teorema 1.10 *Fie* $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *o funcție măsurabilă, fie* $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *un operator mărginit și auto-adjunct astfel încât* $A^2 = I$ *și fie* $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *o funcție continuă cu următoarele proprietăți:*
(i) $F \circ |\sigma| \in L^p(\mathbb{Z}), 1 \leq p < \infty$*;*
(ii) $\overline{F \circ \sigma} = F \circ \overline{\sigma}$*;*
(iii) $|F \circ \sigma| = |F \circ |\sigma||$*;*
(iv) $F(z_1 z_2) = F(z_1) F(z_2)$*, pentru orice* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$*.*
Atunci $F\left(T_\sigma^A\right) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *este în clasa Schatten-von Neumann* S_p *dacă și numai dacă* $F \circ |\sigma| \in L^p(\mathbb{Z}), 1 \leq p < \infty$*. În plus, dacă* $F \circ |\sigma| \in L^p(\mathbb{Z})$*, atunci*

$$\left\| F\left(T_\sigma^A\right) \right\|_{S_p} = \|F \circ |\sigma|\|_{L^p(\mathbb{Z})},$$

unde $\| \cdot \|_{S_p}$ *reprezintă norma în clasa Schatten-von Neumann* S_p*.*

Fie $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operator liniar mărginit astfel încât $A^2 = I$ și fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ o funcție continuă. În cele ce urmează, prezentăm câteva rezultate referitoare la solvabilitatea ecuației

$$F\left(T_\sigma^A\right) f + \lambda f = g, \quad f, g \in \mathcal{H}, \tag{5}$$

asociat operatorului liniar $F\left(T_\sigma^A\right) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ unde λ este un număr real pozitiv. Putem rescrie ecuația (5) astfel

$$\begin{aligned} F\left(T_\sigma^A\right) f + \lambda f = g &\Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(\sigma(n))(Af, e_n)_{\mathcal{H}} A e_n + \lambda \sum_{n\in\mathbb{Z}} (Af, e_n)_{\mathcal{H}} A e_n = g \\ &\Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(F(\sigma(n)) + \lambda\right)(Af, e_n)_{\mathcal{H}} A e_n = g \\ &\Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(F(\sigma(n)) + \lambda\right) \mathcal{F}_{\mathcal{H}}^A f(n) A e_n = g. \end{aligned} \tag{6}$$

Presupunem că $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ este o funcție măsurabilă cu valori reale pozitive și că λ este un număr real pozitiv. Folosind faptul că operatorul liniar $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^A : \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{Z})$ este o bijecție (conform Teoremei 1.1), rezultă că pentru orice $g \in \mathcal{H}$ există $f \in \mathcal{H}$ astfel încât $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^A f(n) = \dfrac{\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^A g(n)}{F(\sigma(n)) + \lambda}$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, deoarece șirul $\left\{\dfrac{\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^A g(n)}{F(\sigma(n)) + \lambda}\right\} \in L^2(\mathbb{Z})$.

Fie $g \in \mathcal{H}$ o funcție arbitrară astfel încât $g = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} (Ag, e_n)_{\mathcal{H}} A e_n$. Atunci, rezultă că $f \in \mathcal{H}$ definit prin

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(Ag, e_n)_{\mathcal{H}}}{F(\sigma(n)) + \lambda} A e_n$$

este unica soluția a ecuației (5).

Desigur, conform relației (6), avem

$$\begin{aligned} \left(F\left(T_\sigma^A\right) + \lambda\right) f &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(F(\sigma(n)) + \lambda\right) \cdot \frac{\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^A g(n)}{F(\sigma(n)) + \lambda} A e_n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (Ag, e_n)_{\mathcal{H}} A e_n \\ &= A\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} (Ag, e_n)_{\mathcal{H}} e_n\right) \\ &= A(Ag) = g. \end{aligned}$$

Pentru a studia regularitatea soluțiilor ecuației (5) trebuie să introducem unele spații Hilbert convenabile (pentru mai multe detalii privind geneza acestor spații Hilbert, a se vedea de exemplu lucrările [3], [4] și [16]).

În ceea ce privește regularitatea soluției ecuației (5), introducem spațiul $\widetilde{\mathcal{H}}_\sigma^{A,k}$ astfel: mai întâi, considerăm spațiul Hilbert

$$L_\sigma^{2,k}(\mathbb{Z}) = \left\{ \{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \alpha_n \in \mathbb{C} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 \left(1 + (\sigma(n))^2\right)^k < \infty \right\}, \quad k \in (0, \infty)$$

în care produsul scalar este dat de

$$(\alpha, \beta)_{L^{2,k}_\sigma(\mathbb{Z})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \overline{\beta_n} \left(1 + (\sigma(n))^2\right)^k,$$

pentru orice $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \beta = (\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C}$. Apoi, stabilim

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{H}}^{A,k}_\sigma &= \left\{ f \in \mathcal{H} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |(Af, e_n)_{\mathcal{H}}|^2 \left(1 + (\sigma(n))^2\right)^k < \infty \right\} \\ &= \left\{ f \in \mathcal{H} : \left\{\mathcal{F}^A_{\mathcal{H}} f(n)\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \in L^{2,k}_\sigma(\mathbb{Z}) \right\}, \quad k \in (0, \infty).\end{aligned}$$

Spațiul $\widetilde{\mathcal{H}}^{A,k}_\sigma$ este înzestrat cu produsul scalar

$$\begin{aligned}(f_1, f_2)_{\widetilde{\mathcal{H}}^{A,k}_\sigma} &= \left(\left\{\mathcal{F}^A_{\mathcal{H}} f_1(n)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}, \left\{\mathcal{F}^A_{\mathcal{H}} f_2(n)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}\right)_{L^{2,k}_\sigma(\mathbb{Z})} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}^A_{\mathcal{H}} f_1(n) \overline{\mathcal{F}^A_{\mathcal{H}} f_2(n)} \left(1 + (\sigma(n))^2\right)^k,\end{aligned}$$

dacă

$$f_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}^A_{\mathcal{H}} f_1(n) A e_n, \quad f_2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}^A_{\mathcal{H}} f_2(n) A e_n.$$

Putem să observăm faptul că $\widetilde{\mathcal{H}}^{A,k}_\sigma$ este un spațiu Hilbert izometric izomorf cu $L^{2,k}_\sigma(\mathbb{Z})$ prin izomorfismul izometric $G^{A,k}_\sigma : \widetilde{\mathcal{H}}^{A,k}_\sigma \to L^{2,k}_\sigma(\mathbb{Z})$ dat de

$$G^{A,k}_\sigma f = \left\{\mathcal{F}^A_{\mathcal{H}} f(n)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Într-adevăr,

$$\left\|G^{A,k}_\sigma f\right\|^2_{L^{2,k}_\sigma(\mathbb{Z})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\mathcal{F}^A_{\mathcal{H}} f(n)\right|^2 \left(1 + (\sigma(n))^2\right)^k = \|f\|^2_{\widetilde{\mathcal{H}}^{A,k}_\sigma}.$$

Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ o funcție continuă reală pozitivă. Presupunem că există o constantă pozitivă C astfel încât

$$C\left(1 + \tau^2\right)^{\frac{k}{2}} < F(\tau), \tag{7}$$

pentru orice $\tau \in \Sigma\left(T^A_\sigma\right) = \{\sigma(n) : n \in \mathbb{Z}\}^c$. Aceasta este o condiție de elipticitate pentru funcția F.

Acum, considerăm spațiul

$$\widetilde{\mathcal{H}}^A_{F,\sigma} = \left\{ f \in \mathcal{H} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |(Af, e_n)_{\mathcal{H}}|^2 \left(1 + F(\sigma(n))\right)^2 < \infty \right\}$$

cu produsul scalar definit de

$$(f, g)_{\widetilde{\mathcal{H}}^A_{F,\sigma}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (Af, e_n)_{\mathcal{H}} \overline{(Ag, e_n)_{\mathcal{H}}} \left(1 + F(\sigma(n))\right)^2,$$

pentru orice $f, g \in \mathcal{H}$. Prin condiția de elipticitate (7), se menține următoarea incluziune continuă

$$\widetilde{\mathcal{H}}^A_{F,\sigma} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}^{A,k}_{\sigma}.$$

În continuare, considerăm operatorul $L^A_{F,\sigma} : \widetilde{\mathcal{H}}^A_{F,\sigma} \to \mathcal{H}$, $L^A_{F,\sigma} = F(T^A_\sigma) + I$, definit prin

$$L^A_{F,\sigma} f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(F(\sigma(n)) + 1\right) (Af, e_n)_{\mathcal{H}} A e_n$$

pentru orice $f \in \widetilde{\mathcal{H}}^A_{F,\sigma}$, unde $I : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ este operatorul identitate.

Propoziția 1.6 *Fie $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ o funcție măsurabilă reală pozitivă, fie $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operator liniar mărginit astfel încât $A^2 = I$, fie $T^A_\sigma : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ multiplicatorul Fourier generalizat corespunzător și fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ o funcție continuă reală pozitivă care satisface relația (7). Atunci, pentru orice $g \in \mathcal{H}$, ecuația liniară*

$$L^A_{F,\sigma} f = g$$

are o unică soluție $f \in \widetilde{\mathcal{H}}^A_{F,\sigma}$. Mai mult,

$$\|f\|_{\widetilde{\mathcal{H}}^A_{F,\sigma}} = \|Ag\|_{\mathcal{H}}.$$

Observația 1.5 Dacă presupunem, în plus, că operatorul liniar $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ din Propoziția 1.6 este, de asemenea, un operator auto-adjunct obținem $\|f\|_{\widetilde{\mathcal{H}}^A_{F,\sigma}} = \|g\|_{\mathcal{H}}$ pentru $f \in \widetilde{\mathcal{H}}^A_{F,\sigma}$ și $g \in \mathcal{H}$.

Observația 1.6 În ipotezele de mai sus, ecuația liniară $F(T^A_\sigma)f + \lambda f = g$ este echivalentă cu ecuația liniară $L^A_{G,\sigma} f = h$, unde $G = \dfrac{F}{\lambda}$ și $h = \dfrac{g}{\lambda}$. Astfel, conform Propoziției 1.6, ultima ecuație are o soluție unică $f \in \widetilde{\mathcal{H}}^A_{G,\sigma}$ și, în plus,

$$\|f\|_{\widetilde{\mathcal{H}}^A_{G,\sigma}} = \|Ah\|_{\mathcal{H}}.$$

Prin urmare, ecuația liniară inițială are o unică soluție $f \in \widetilde{\mathcal{H}}^A_{G,\sigma} = \widetilde{\mathcal{H}}^A_{\frac{F}{\lambda},\sigma}$ cu

$$\|f\|_{\widetilde{\mathcal{H}}^A_{\frac{F}{\lambda},\sigma}} = \frac{1}{\lambda}\|Ag\|_{\mathcal{H}}.$$

Dacă operatorul liniar $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ este, de asemenea, auto-adjunct, atunci

$$\|f\|_{\widetilde{\mathcal{H}}^A_{\frac{F}{\lambda},\sigma}} = \frac{1}{\lambda}\|g\|_{\mathcal{H}}.$$

În continuare prezentăm un exemplu de funcție de multiplicatori Fourier generalizați în legătură cu o transformată bine cunoscută și foarte importantă, care ilustrează interacțiunea dintre analiza timp–frecvență și operatorii pseudo-diferențiali, și anume transformata Weyl. Pentru mai multe detalii referitoare la transformata Weyl, vezi de exemplu lucrările [36] și [37].

Fie $W_\tau : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ transformata Weyl definită prin

$$(W_\tau f, g)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \tau(x,\xi) W(f,g)(x,\xi) \mathrm{d}x \mathrm{d}\xi$$

unde

$$W(f,g)(x,\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi} f\left(x + \frac{y}{2}\right) \overline{g\left(x - \frac{y}{2}\right)} \mathrm{d}y$$

este transformata Wigner și

$$\tau \in L_*^r\left(\mathbb{R}^{2n}\right) = \left\{\tau \in L^r\left(\mathbb{R}^{2n}\right) : \hat{\tau} \in L^{r'}\left(\mathbb{R}^{2n}\right)\right\},$$

unde $2 \leq r \leq \infty$ și r' este indicele conjugat al lui r $\left(\text{i.e. } \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1\right)$ și $\hat{\tau}$ este o transformare Fourier a lui τ. Apoi, conform Teoremei 14.3 din lucrarea [37], rezultă că transformata Weyl $W_\tau : L^2\left(\mathbb{R}^n\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ este un operator liniar compact și mărginit.

Atunci când τ este un simbol cu valori reale, rezultă că $W_\tau : L^2\left(\mathbb{R}^n\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ este, de asemenea, un operator liniar auto-adjunct. Prin urmare, folosind teorema spectrală pentru operatori compacti și auto-adjuncți, obținem

$$W_\tau f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sigma(n)\left(f, \varphi_n\right)\varphi_n, \qquad f \in L^2\left(\mathbb{R}^n\right),$$

unde $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ este o bază ortonormală pentru $L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ constând din vectori proprii ai lui $W_\tau : L^2\left(\mathbb{R}^n\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ și $\sigma(n)$ este valoarea proprie a lui $W_\tau : L^2\left(\mathbb{R}^n\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ corespunzătoare funcției proprii $\varphi_n, n \in \mathbb{Z}$; convergența seriei este înțeleasă ca fiind în $L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Fie $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operator auto-adjunct inversabil. Atunci, pentru $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{A^{-1}\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, putem scrie

$$W_\tau f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sigma(n)(f, A\psi_n)A\psi_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sigma(n)(Af, \psi_n)A\psi_n = W_\tau^A f,$$

ultima egalitate fiind o notație.

Fie $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcție continuă. Definim operatorul liniar $F\left(W_\tau^A\right) : L^2\left(\mathbb{R}^n\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$, prin

$$F\left(W_\tau^A\right) f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F\left(\sigma(n)\right)\left(Af, \psi_n\right)A\psi_n.$$

Atunci putem demonstra rezultate similare pentru operatorul $F(W_\tau^A) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ precum cele obținute pentru operatorul $F\left(T_\sigma^A\right) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, unde $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ și $T_\sigma^A = W_\tau^A$. De exemplu, putem enunța următoarea teoremă.

Teorema 1.11 *Fie $\tau : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un simbol cu proprietățile menționate mai sus, fie $W_\tau^A : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ multiplicatorul Fourier generalizat corespunzător și fie $F(W_\tau^A) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ un operator liniar, unde $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ este un operator*

mărginit și auto-adjunct astfel încât $A^2 = I$. Fie $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ o funcție măsurabilă și fie $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcție continuă cu următoarele proprietăți:
(i) $F(z_1 z_2) = F(z_1)F(z_2)$ *pentru orice* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
(ii) $|F \circ \sigma| = |F \circ |\sigma||$;
(iii) $\overline{F \circ \sigma} = F \circ \sigma$.

Atunci afirmațiile următoare sunt adevărate:
(j) Operatorul liniar $F(W_\tau^A) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ *este mărginit dacă și numai dacă* $F \circ \sigma \in L^\infty(\mathbb{Z})$. *Mai mult, dacă* $F \circ \sigma \in L^\infty(\mathbb{Z})$ *atunci*

$$\|F(W_\tau^A)\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))} = \|F \circ \sigma\|_{L^\infty(\mathbb{Z})};$$

(jj) Presupunem, în plus, că operatorul liniar $F(W_\tau^A) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ *este un operator liniar mărginit. Atunci* $F(W_\tau^A) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ *este compact dacă și numai dacă* $F(0) = 0$;
(jjj) Operatorul liniar $F(W_\tau^A) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ *este în clasa Schatten-von Neumann* $S_p, 1 \le p < \infty$, *dacă și numai dacă* $F \circ |\sigma| \in L^p(\mathbb{Z})$. *Mai mult, dacă* $F \circ |\sigma| \in L^p(\mathbb{Z})$, *atunci*

$$\|F(W_\tau^A)\|_{S_p} = \|F \circ |\sigma|\|_{L^p(\mathbb{Z})}.$$

Observația 1.7 Dacă operatorul liniar mărginit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ satisface ipotezele din Teorema 1.11, atunci transformata Weyl este de fapt un multiplicator Fourier standard.

Capitolul 2, intitulat "Transformata Fourier α-ferăstrată (α-WFT)", este dedicat introducerii unei noi transformate timp-frecvență, numită transformarea Fourier α-ferăstrată (α-WFT), $G_\phi^\alpha : L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R}^2)$ unde α este un parametru fracționar și $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ este o funcție fereastră.

Rezultatele prezentate în acest capitol au făcut obiectul lucrării originale [10], intitulată **"α-Windowed Fourier transform (α-WFT)"**, lucrare publicată în Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications, vol. 15, article number 75, 2024, la care autoarea tezei a fost coautor alături de Viorel Catană și Mihaela Grațiela Scumpu.

Pentru început, redăm într-o prezentare succintă câteva noțiuni referitoare la transformata Fourier fracționară, care a fost inițial introdusă de Almeida în lucrarea [1].

Definiția 2.1 *Pentru orice funcție* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *transformata Fourier fractionară de ordin* α, *notată* $\mathcal{F}^\alpha$, *este definită prin*

$$\mathcal{F}^\alpha[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{K}_\alpha(x,\xi)dx, \tag{8}$$

unde $\mathcal{K}_\alpha(x,\xi)$ *reprezintă nucleul FrFT și este dat de*

$$\mathcal{K}_\alpha(x,\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-i\cot\alpha}{2\pi}} \exp\left\{\frac{i(x^2+\xi^2)\cot\alpha}{2} - i\xi x \csc\alpha\right\}, & \alpha \neq k\pi \\ \delta(x-\xi), & \alpha = 2k\pi \\ \delta(x+\xi), & \alpha = 2(k+1)\pi, \end{cases}$$

unde $(x,\xi)\in\mathbb{R}^2$, $k\in\mathbb{Z}$ *și* $\delta(\cdot)$ *este o fucție Dirac.*

În cazul particular $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ transformata Fourier fracționară a funcției $f\in L^2(\mathbb{R})$ se reduce, conform [1], la transformata Fourier clasică definită prin

$$\mathcal{F}[f](\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\exp\{-i\xi x\}\,dx.$$

Transformata Fourier fracționară inversă corespunzătoare relației (8) este dată de

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}^{\alpha}[f](\xi)\overline{\mathcal{K}_{\alpha}(x,\xi)}d\xi.$$

Pentru orice $f,g\in L^2(\mathbb{R})$, relația lui Parseval pentru transformata Fourier fracționară este dată de

$$\left(\mathcal{F}^{\alpha}[f],\mathcal{F}^{\alpha}[g]\right)_{L^2(\mathbb{R})}=(f,g)_{L^2(\mathbb{R})}\,.$$

În particular, pentru $f=g$, obținem

$$\|\mathcal{F}^{\alpha}[f]\|^2_{L^2(\mathbb{R})}=\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,.$$

care reprezintă relația de conservare a energiei.

Următorul rezultat este reprezentat de o definiție a convoluției fracționale.

Definiția 2.2([33]) *Fie $f,g\in L^2(\mathbb{R})$ două funcții. Atunci, convoluția fracționară de ordin α, notată $*_\alpha$, este definită prin*

$$(f *_\alpha g)(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)g(u-x)\exp\left\{\frac{i(x^2-u^2)\cot\alpha}{2}\right\}dx. \tag{9}$$

Pentru $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, convoluția fracțională definită mai sus se reduce la convoluția clasică dată de

$$(f*g)(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)g(u-x)dx.$$

Teorema de convoluție corespunzătoare relației (9) afirmă că

$$\mathcal{F}^{\alpha}[f *_\alpha g](\xi)=\mathcal{F}^{\alpha}[f](\xi)\mathcal{F}[g](\xi\csc\alpha),$$

pentru orice $f,g\in L^2(\mathbb{R})$.

În continuare definim conceptul de transformată Fourier α-ferăstrată. Mai întâi, reamintim definiția transformatei clasice Fourier ferăstrată (WFT) introdusă de Gabor în lucrarea [15].

Definiția 2.3 (**WFT**, [15]) *Pentru o funcție fereastră $\phi\in L^2(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, funcția sa fiică-fereastră sau nucleul său Fourier ferăstrat se notează cu $\phi_{\omega,u}$ și este definit prin*

$$\phi_{\omega,u}(x)=\phi(x-u)\exp\{i\omega x\}.$$

Transformata Fourier ferăstrată a lui $f \in L^2(\mathbb{R})$ în raport cu funcția fereastră $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ este definită prin

$$G_\phi f(\omega, u) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\phi_{\omega,u}(x)}dx.$$

Pentru a adopta o tratare matematică eficientă a transformatei Fourier α-ferăstrată ce va fi introdusă, definim o familie de funcții $\mathcal{F}_\phi^\alpha(\omega, u)$.

Definiția 2.4 *Pentru o funcție fereastră $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ împreună cu parametrul fracționar α, o familie de funcții $\mathcal{F}_\phi^\alpha(\omega, u)$ este definită prin*

$$\mathcal{F}_\phi^\alpha(\omega, u) = \left\{ \phi_{\omega,u}^\alpha(x) := \phi(x-u) \exp\left\{ i\omega x - \frac{i(x^2-u^2)\cot\alpha}{2} \right\}, \omega, u, x \in \mathbb{R} \right\},$$

unde $\alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$ este denumit parametru fracționar.

Lema 2.1 Pentru $\phi_{\omega,u}^\alpha \in L^2(\mathbb{R})$ avem

$$\left\|\phi_{\omega,u}^\alpha\right\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Definiția 2.5 (α-**WFT**) *Fie $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ o funcție fereastră și fie α un parametru fracționar astfel încât $\alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Atunci, transformata Fourier α-ferăstrată a funcției $f \in L^2(\mathbb{R})$ în raport cu ϕ și α este definită prin*

$$\begin{aligned} G_\phi^\alpha f(\omega, u) &= \left(f, \phi_{\omega,u}^\alpha\right)_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\phi_{\omega,u}^\alpha(x)}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\phi(x-u)\exp\left\{ i\omega x - \frac{i(x^2-u^2)\cot\alpha}{2} \right\}}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\phi(x-u)}\exp\left\{ -i\omega x + \frac{i(x^2-u^2)\cot\alpha}{2} \right\}dx, \end{aligned} \tag{10}$$

pentru orice $(\omega, u) \in \mathbb{R}^2$.

Observația 2.1 Este de remaracat faptul că transformata Fourier α-ferăstrată (α-WFT) se reduce la transformata clasică Fourier ferăstrată (WFT) atunci când $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Proprietățile transformatei Fourier α-ferăstrată au reprezentat un subiect de interes în cadrul celui de-al doilea capitol, astfel că în continuare enunțăm câteva rezultate.

Observația 2.2 Transformata Fourier α-ferăstrată definită în relația (10) poate fi de asemenea exprimată într-o formă de convoluție după cum urmează

$$G_\phi^\alpha f(\omega, u) = \left(M_{-\omega} f *_\alpha \tilde{\phi}\right)(u),$$

unde $M_{-\omega} f(x) = \exp\{-i\omega x\} f(x)$ și $\tilde{\phi}(x) = \overline{\phi}(-x)$.

Mai mult, putem observa că are loc următoarea egalitate

$$\mathcal{F}^\alpha[G_\phi^\alpha f(\omega,u)](\xi) = \mathcal{F}^\alpha[M_{-\omega} f](\xi)\mathcal{F}[\tilde{\phi}](\xi \csc\alpha).$$

Lema 2.2 Fie $G_\phi^\alpha f(\omega,u)$ transformata Fourier α-ferăstrată a oricărei funcții $f \in L^2(\mathbb{R})$ în raport cu funcția fereastră $\phi \in L^2(\mathbb{R})$. Atunci, obținem

$$G_\phi^\alpha f(\omega,u) = \exp\{-i\omega u\}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^\alpha[f](\xi)\overline{\mathcal{F}[\exp\{i\omega z\}\phi(z)]}(\xi\csc\alpha)\overline{\mathcal{K}_\alpha(u,\xi)}d\xi,$$

unde $\mathcal{F}$ reprezintă transformata Fourier dată prin relația (8) în cazul particular $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ și $(\omega,u) \in \mathbb{R}^2$.

Următoarele două rezultate fac referire la mărginirea transformatei Fourier α-ferăstrată.

Teorema 2.3 *Fie $\phi \in L^p(\mathbb{R}), 1 \leq p \leq \infty$ și fie $f \in L^1(\mathbb{R})$. Atunci,*

$$\left\|G_\phi^\alpha f(\omega,\cdot)\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|\phi\|_{L^p(\mathbb{R})}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$.

Propoziția 2.1 *Fie $\phi \in L^p(\mathbb{R})$ și fie $f \in L^q(\mathbb{R})$ unde $p,q \in [1;\infty]$ astfel încât $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Atunci,*

$$\left|G_\phi^\alpha f(\omega,u)\right| \leq \|\phi\|_{L^p(\mathbb{R})}\|f\|_{L^q(\mathbb{R})},$$

pentru orice $(\omega,u) \in \mathbb{R}^2$.

Observația 2.3 Dacă presupunem $p = q = 2$ în ipotezele Propoziției 2.1 obținem estimarea

$$\left|G_\phi^\alpha f(\omega,u)\right| \leq \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

pentru orice $(\omega,u) \in \mathbb{R}^2$. Astfel, rezultă că $G_\phi^\alpha h$ este o funcție mărginită pe $\mathbb{R}^2$ pentru orice $f,\phi \in L^2(\mathbb{R})$, unde $h(x) = f(x)\exp\left\{\dfrac{ix^2\cot\alpha}{2}\right\}$.

Propoziția 2.2 *Transformata Fourier α-ferăstrată a funcției $f \in L^2(\mathbb{R})$ în raport cu parametrul fracționar α și funcția fereastră $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ poate fi redusă la transformata clasică Fourier ferăstrată (WFT) astfel*

$$G_\phi^\alpha f(\omega,u) = \exp\left\{-\frac{iu^2\cot\alpha}{2}\right\}G_\phi h(\omega,u),$$

pentru orice $(\omega,u) \in \mathbb{R}^2$, unde $h(x) = f(x)\exp\left\{\dfrac{ix^2\cot\alpha}{2}\right\}$.

În următorul rezultat studiem câteva proprietăți ale transformatei Fourier α-ferăstrată (α-WFT).

Teorema 2.4 *Fie $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ o funcție fereastră și fie α un parametru fracționar. Atunci, transformata Fourier α-ferăstrată (α-WFT) are următoarele proprietăți*
(i) ***Liniaritatea:***

$$[G_\phi^\alpha(\lambda f+\mu g)(\omega,u)]=\lambda G_\phi^\alpha f(\omega,u)+\mu G_\phi^\alpha g(\omega,u),$$

pentru orice $f,g\in L^2(\mathbb{R})$ *și pentru constante arbitrare* λ *și* μ.
(ii) ***Paritatea:***

$$G_{P\phi}^\alpha(Pf)(\omega,u)=G_\phi^\alpha f(-\omega,-u),$$

unde $Pf(x)=f(-x)$ *pentru orice* $f\in L^2(\mathbb{R})$.
(iii) ***Modulația:***

$$G_\phi^\alpha(M_{\omega_0}f)(\omega,u)=G_\phi^\alpha f(\omega-\omega_0,u),$$

unde $M_{\omega_0}f(x)=\exp\{i\omega_0 x\}\,f(x)$ *pentru orice* $f\in L^2(\mathbb{R})$.
(iv) ***Translația:***

$$\begin{aligned}G_\phi^\alpha(T_{x_0}f)(\omega,u)&=\exp\{-iux_0\cot\alpha\}\exp\{-i(\omega-x_0\cot\alpha)x_0\}\\&\quad\times G_\phi^\alpha f(\omega-x_0\cot\alpha,u-x_0),\end{aligned}$$

unde $T_{x_0}f(x)=f(x-x_0)$ *pentru orice* $f\in L^2(\mathbb{R})$.
(v) ***Conjugarea:***

$$G_{\overline{\phi}}^\alpha(\overline{f})(\omega,u)=\overline{G_\phi^{-\alpha}f(-\omega,u)},$$

pentru orice $f\in L^2(\mathbb{R})$.
(vi) ***Comutarea lui*** f ***cu*** ϕ*:*

$$G_\phi^\alpha f(\omega,u)=\exp\left\{\frac{-iu^2\cot\alpha}{2}\right\}\exp\{-i\omega u\}\,\overline{G_f^{-\alpha}\phi(-\omega+u\cot\alpha,-u)}$$

pentru orice $f\in L^2(\mathbb{R})$.

În continuare amintim o proprietate a transformatei Fourier α-ferăstrată referitoare la relația de ortogonalitate.

Teorema 2.5 (**Relația de ortogonalitate**) *Fie* $\phi,\psi\in L^2(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ *două funcții fereastră și fie* α *un parametru fracționar. Atunci*

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}G_\phi^\alpha f(\omega,u)\overline{G_\psi^\alpha g(\omega,u)}d\omega du=2\pi\,(\psi,\phi)_{L^2(\mathbb{R})}\,(f,g)_{L^2(\mathbb{R})},$$

pentru orice $f,g\in L^2(\mathbb{R})$.

Observația 2.4 În ipoteza că $\phi,\psi\in L^2(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ astfel încat $(\psi,\phi)_{L^2(\mathbb{R})}\neq 0$, relația din enunțul Teoremei 2.5 poate fi scrisă sub forma

$$(f,g)_{L^2(\mathbb{R})}=\frac{1}{2\pi\,(\psi,\phi)_{L^2(\mathbb{R})}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}G_\phi^\alpha f(\omega,u)\overline{G_\psi^\alpha g(\omega,u)}d\omega du$$

Observația 2.5 Conform acestei teoreme, următoarele afirmații sunt adevărate:
(i) Dacă $\phi=\psi$, atunci

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} G_{\phi}^{\alpha} f(\omega,u)\overline{G_{\phi}^{\alpha} g(\omega,u)} d\omega du = 2\pi \left\|\phi\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 (f,g)_{L^2(\mathbb{R})}.$$

(ii) Dacă $f = g$ și $\phi = \psi$, atunci

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left|G_{\phi}^{\alpha} f(\omega,u)\right|^2 d\omega du = 2\pi \left\|\phi\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \left\|f\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

sau echivalent

$$\left\|G_{\phi}^{\alpha} f\right\|_{L^2(\mathbb{R})} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left\|\phi\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\|f\right\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

(iii) Dacă $\left\|\phi\right\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ în relația (ii), atunci

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left|G_{\phi}^{\alpha} f(\omega,u)\right|^2 d\omega du = 2\pi \left\|f\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

(iv) Dacă $\left\|\phi\right\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ și $\left\|f\right\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ în relația (ii), atunci

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left|G_{\phi}^{\alpha} f(\omega,u)\right|^2 d\omega du = 2\pi.$$

O altă proprietate interesantă a transformatei Fourier ferăstrată este reprezentată de formula de inversiune, care permite reconstruirea semnalului original din transformarea sa Fourier ferăstrată.

Teorema 2.6 (**Formula de inversiune**) *Fie $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ două funcții fereastră astfel încât $(\psi,\phi)_{L^2(\mathbb{R})} \neq 0$ și fie α un parametru fracționar. Atunci, orice funcție $f \in L^2(\mathbb{R})$ poate fi reconstruită în felul următor*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\,(\psi,\phi)_{L^2(\mathbb{R})}} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} G_{\phi}^{\alpha} f(\omega,u)\psi_{\omega,u}^{\alpha}(x) d\omega du, \tag{11}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Mai mult, dacă $\phi = \psi$, obținem

$$f(x) = \frac{1}{2\pi \left\|\phi\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} G_{\phi}^{\alpha} f(\omega,u)\phi_{\omega,u}^{\alpha}(x) d\omega du$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

În continuare prezentăm un rezultat referitor la caracterizarea imaginii transformatei Fourier α-ferăstrată

Teorema 2.7 (**Caracterizarea imaginii lui G_{ϕ}^{α}**) *Fie $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ o funcție fereastră astfel încât $\left\|\phi\right\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ și fie α un parametru fracționar. Presupunem că $h \in L^2(\mathbb{R})$. Atunci $h \in G_{\phi}^{\alpha}\left(L^2(\mathbb{R})\right)$ dacă și numai dacă satisface următoarea relație*

$$h(\omega',u') = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h(\omega,u)\left(\phi_{\omega,u}^{\alpha}, \phi_{\omega',u'}^{\alpha}\right)_{L^2(\mathbb{R})} d\omega du,$$

pentru orice $(\omega', u') \in \mathbb{R}^2$.

Condiția de admisibilitate asociată transformatei Fourier α-ferăstrată (α-WFT) este stabilită în următorul rezultat.

Propoziția 2.3 *Fie* $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ *o funcție fereastră. Atunci* ϕ *este o fereastră admisibilă dacă*

$$0 < C_\phi = \int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{F}\left[\exp\{i\omega\cdot\}\phi(\cdot)\right](\xi \csc \alpha)\right|^2 d\omega < \infty, \quad \text{a.e. } \xi \in \mathbb{R}.$$

În propoziția următoare prezentăm un rezultat de convergență referitor la formula de reconstrucție (11).

Propoziția 2.4 *Fie* $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ *o funcție fereastră, fie* α *un parametru fracționar și fie* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *astfel încât*

$$f_{M,N}(x) = \frac{1}{2\pi \|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}} \int_{\mathbb{R}} \int_{M<\omega<N} G^\alpha_\phi f(\omega, u) \phi^\alpha_{\omega,u}(x) d\omega du.$$

Atunci, $f_{M,N}$ *este uniform continuă și*

$$\mathcal{F}^\alpha[f_{M,N}](\xi) = \frac{1}{2\pi \|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}} \mathcal{F}^\alpha[f](\xi) \left\{ \int_{M<\omega<N} \left| \mathcal{F}\left[\exp\{i\omega z\}\phi(z)\right](\xi \csc \alpha)\right|^2 d\omega \right\}.$$

Propoziția 2.5 *Fie* $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ *o funcție fereastră. Atunci, pentru orice* $f \in L^2(\mathbb{R})$, *avem*

$$\lim_{M\to-\infty, N\to\infty} \left\| f - \frac{2\pi \|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}}{C_\phi} f_{M,N} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

Mai mult, dacă $\mathcal{F}^\alpha[f] \in L^1(\mathbb{R})$, *atunci*

$$\lim_{M\to-\infty, N\to\infty} \left\| f - \frac{2\pi \|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}}{C_\phi} f_{M,N} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0.$$

În procesarea semnalelor, un principiu de incertitudine afirmă că produsul variantelor semnalului în domeniile timp și frecvență are o limită inferioară. În ultimii ani, mai mulți autori au propus generalizări ale principiilor de incertitudine pentru diferite tipuri de funcții și transformări timp-frecvență (vezi [18], [19], [34] și [39] pentru principii de incertitudine asociate transformatei liniar canonică (LCT)).

În prima teoremă a subcapitolului 2.4 formulăm un principiu de incertitudine asociat transformatei Fourier α-ferăstrată (α-WFT definită în relația (10)). Apoi, în cadrul Teoremei 2.9, prezentăm pe scurt o formă a principiului de incertitudine Lieb pentru transformata Fourier α-ferăstrată. Pentru mai multe detalii referitoare la principiul de incertitudine Lieb, a se vedea de exemplu lucrările [2], [17] și [21].

Teorema 2.8 *Fie $G_\phi^\alpha f(\omega,u)$ transformata Fourier α-ferăstrată a unei funcții netriviale $f \in L^2(\mathbb{R})$. Atunci are loc următoarea inegalitate de incertitudine*

$$\left\{\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 \left|\mathcal{F}^\alpha[f](\xi)\right|^2 d\xi\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\rho|^2 \left|\mathcal{F}^\beta[G_\phi^\alpha f(\omega,u)](\rho)\right|^2 d\omega d\rho\right\}^{\frac{1}{2}} \geq \frac{\pi \|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} |\sin(\alpha-\beta)|}{\sqrt{C_\phi}} \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})},$$

unde α și β sunt alese astfel încât $\beta = \alpha - \gamma$, $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma \neq 0$ și ϕ este o undină (wavelet) admisibilă.

Teorema 2.9 (**Inegalitatea lui Lieb pentru transformata Fourier α-ferăstrată**) *Fie $f \in L^2(\mathbb{R})$ o funcție și $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ o funcție fereastră. Atunci,*

$$\left\|G_\phi^\alpha f\right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

unde $2 \leq p < \infty$.

În cadrul subcapitolului 2.5 stabilim o legătură între transformata Fourier α-ferăstrată (α-WFT) și o versiune a distribuției fracționare Wigner definită prin analogie cu α-WFT.

Definiția 2.6 (β-**WD**) *Fie $\beta \in \mathbb{R}$ un parametru fracționar astfel încât $\beta \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Atunci, distribuția fracționară β-Wigner (β-WD) a funcției $f \in L^2(\mathbb{R})$ este definită prin*

$$W^\beta f(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}} f\left(t+\frac{x}{2}\right) \overline{f\left(t-\frac{x}{2}\right) \exp\left\{i\left(\xi x - \frac{(x^2-\xi^2)\cot\beta}{2}\right)\right\}} dx, \tag{12}$$

unde $(t,\xi) \in \mathbb{R}^2$.

În următoarea teoremă stabilim o legătură între distribuția fracționară β-Wigner (β-WD) și transformata Fourier α-ferăstrată (α-WFT).

Teorema 2.10 *Dacă $G_\phi^\alpha f$ și $W^\beta f$ sunt transformata Fourier α-ferăstrată și, respectiv, distribuția fracționară β-Wigner definite în relațiile (10) și (12), atunci are loc următoarea egalitate*

$$\begin{aligned} W^\beta f(t,\xi) = {} & \frac{1}{\pi \|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}} \exp\left\{i\left(-4t^2\cot\alpha - 2\xi t + \frac{\xi^2}{2}\cot\beta\right)\right\} \\ & \times \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left\{2it(u\cot\alpha+\omega)\right\} \overline{G_{\tilde{\phi}}^\alpha(M_{-2t\cot\alpha} f)}(-\omega, -(u-2t)) \\ & \times G_\phi^\alpha\left(M_{-2\xi\cdot+2(\cdot-t)^2\cot\beta} f\right)(\omega,u) d\omega du. \end{aligned}$$

În ultimul subcapitol al Capitolului 2 introducem versiunile semi-discretă și discretă ale transformatei Fourier α-ferăstrată (α-WFT). Pentru versiunea semi-discretă fixăm parametrul de translație u și lăsăm parametrul de frecvență ω să varieze pe scările discrete. Apoi, luăm în considerare ambii parametri care variază pe o rețea discretă în planul timp-frecvență fracționar. La final, prezentăm formula de reconstrucție asociată transformatei Fourier α-ferăstrată discretă.

(i) *Versiunea semi-discretă a transformatei Fourier α-ferăstrată*
Pentru acest caz considerăm $\omega = m\omega_0$ unde ω_0 este o constantă pozitivă fixată (numit parametru de rețea (latice parameter)) și $m \in \mathbb{Z}$. Atunci, familia de funcții continue $\mathcal{F}_\phi^\alpha(\omega, u)$ din Definiția 2.4 devine

$$\mathcal{F}_\phi^\alpha(m, u) = \left\{ \phi_{m,u}^\alpha(x) := \phi(x-u) \exp\left\{ im\omega_0 x - \frac{i\,(x^2 - u^2)\cot\alpha}{2} \right\}, x \in \mathbb{R} \right\}, \quad (13)$$

unde $\alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$ și $(m, u) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

Acum putem oferi o definiție a transformatei Fourier α-ferăstrată semi-discretă.

Definiția 2.7 *Fie $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ o funcție fereastră și fie α un parametru fracționar. Atunci, pentru orice $f \in L^2(\mathbb{R})$, avem*

$$G_\phi^\alpha f(m, u) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\phi_{m,u}^\alpha(x)} dx,$$

unde $\phi_{m,u}^\alpha$ este dată în relația (13) și numărul întreg m controlează frecvența ω.

(ii) *Versiunea discretă a transformatei Fourier α-ferăstrată*
Pentru această versiune considerăm $\omega = m\omega_0$ și $u = nu_0$ unde ω_0 și u_0 sunt constante pozitive fixate (numite parametrii de rețea) și $m, n \in \mathbb{Z}$. În acest context, obținem următoarea familie discretă de funcții

$$\phi_{m,n}^\alpha(x) = \phi(x - nu_0) \exp\left\{ im\omega_0 x - \frac{i\left(x^2 - (nu_0)^2\right)\cot\alpha}{2} \right\}, \quad (14)$$

unde $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ și $x \in \mathbb{R}$.

Acum putem oferi o definiție a transformatei Fourier α-ferăstrată discretă.

Definiția 2.8 *Fie $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ o funcție fereastră și fie α un parametru fracționar. Atunci, pentru orice $f \in L^2(\mathbb{R})$, avem*

$$G_\phi^\alpha f(m, n) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\phi_{m,n}^\alpha(x)} dx,$$

unde $\phi_{m,n}^\alpha$ este dată în relația (14) și numerele întregi m și n controlează frecvența și translația.

Capitolul 3 este intitulat "Operatori de localizare asociați transformatei Fourier α-ferăstrată". Prima secțiune a acestui capitol este dedicată operatorilor de localizare asociați transformatei Fourier α-ferăstrată, rezultatele referitoare la acest subiect fiind incluse în lucarea originală [11], intitulată **"Localization operators related to**

α-windowed Fourier transform", lucrare care a fost publicată în UPB Scientific Bulletin, Series A, Applied Mathematics and Physics, vol. 86, iss. 4, 2024, la care autoarea tezei are calitatea de coautor alături de Viorel Catană și Mihaela Grațiela Scumpu.

În a doua secțiune a Capitolului 3, considerând β o funcție cu descreștere rapidă din spațiul Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, introducem în cadrul Definiției 3.4 o nouă clasă de operatori de localizare $\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ asociați transformatei Fourier α-ferăstrată. De asemenea, studiem proprietățile de mărginire, compacitate și apartenență la clasele Schatten-von Neumann pentru această clasă de operatori de localizare.

Definiția 3.1 *Fie $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ două funcții fereastră și fie α un parametru fracționar astfel încât $\alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Atunci, operatorul $L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definit în sens slab prin*

$$\begin{aligned}\left(L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}f, g\right)_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \sigma(\omega,u) G^{\alpha}_{\phi}f(\omega,u)\overline{G^{\alpha}_{\psi}g(\omega,u)}d\omega du \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \sigma(\omega,u)\left(f, \phi^{\alpha}_{\omega,u}\right)_{L^2(\mathbb{R})}\left(\psi^{\alpha}_{\omega,u}, g\right)_{L^2(\mathbb{R})} d\omega du,\end{aligned}$$

pentru orice $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ sau definit în sens tare prin

$$L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}f = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \sigma(\omega,u)\left(f, \phi^{\alpha}_{\omega,u}\right)_{L^2(\mathbb{R})}\psi^{\alpha}_{\omega,u} d\omega du,$$

pentru orice $f \in L^2(\mathbb{R})$, este numit operatorul de localizare asociat transformatei Fourier α-ferăstrată în raport cu simbolul $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^2) + L^{\infty}(\mathbb{R}^2)$.

Observația 3.1 Utilizând formula de inversiune din Teorema 2.6, operatorul de localizare $L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ poate fi definit sub forma

$$\left(L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}f, g\right)_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi\left(\psi, \phi\right)_{L^2(\mathbb{R})}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \sigma(\omega,u) G^{\alpha}_{\phi}f(\omega,u)\overline{G^{\alpha}_{\psi}g(\omega,u)}d\omega du,$$

pentru orice $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ și $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ două funcții fereastră astfel încât $(\psi, \phi)_{L^2(\mathbb{R})} \neq 0$.

Observăm că dacă $\sigma(\omega, u) = 1$ pentru orice $(\omega, u) \in \mathbb{R}^2$, atunci relația de ortogonalitate din Teorema 2.5 implică faptul că operatorul liniar corespunzător coincide cu operatorul identitate pe $L^2(\mathbb{R})$. Deci, funcția $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ care este numită simbol al operatorului de localizare $L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ este introdusă pentru a localiza pe $\mathbb{R}^2$, astfel încat să obținem un operator liniar mărginit netrivial pe $L^2(\mathbb{R})$. De aici și terminologia utilizată frecvent de operator de localizare.

Rezultă că operatorii considerați în Definiția 3.1 și cei din Observația 3.1 diferă printr-o constantă multiplicativă care depinde de cele două ferestre admisibile $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

În continuare, vom aminti câteva rezultate referitoare la mărginirea în $L^2(\mathbb{R})$ a operatorului de localizare $L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. Propozițiile 3.1 și 3.2 cuprind studiul proprietății de mărginire a operatorului de localizare $L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}$, atunci când simbolul σ aparține spațiilor $L^1(\mathbb{R}^2)$, respectiv $L^{\infty}(\mathbb{R}^2)$.

Propoziția 3.1 *Fie $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^2)$ un simbol, fie $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ două funcții fereastră și fie α un parametru fracționar astfel încât $\alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Atunci, operatorul de localizare $L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ este un operator liniar bine definit și mărginit*

$$\left\| L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} \right\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))} \leq \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\sigma\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} .$$

Propoziția 3.2 *Fie $\sigma \in L^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ un simbol, fie $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ două funcții fereastră și fie α un parametru fracționar astfel încât $\alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Atunci, operatorul de localizare $L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ este un operator liniar bine definit și mărginit*

$$\left\| L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} \right\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))} \leq 2\pi \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\sigma\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^2)} .$$

În cadrul următoarei teoreme studiem mărginirea în $L^2(\mathbb{R})$ a operatorului de localizare $L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ atunci când $\sigma \in L^p(\mathbb{R}^2), 1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 3.1 *Fie $\sigma \in L^p(\mathbb{R}^2), 1 \leq p \leq \infty$ un simbol, fie $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ două funcții fereastră și fie α un parametru fracționar astfel încât $\alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Atunci, există un unic operator liniar mărginit $L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ astfel încât*

$$\left\| L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} \right\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))} \leq (2\pi)^{\frac{1}{p'}} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} ,$$

unde p' este indicele conjugat al lui p $\left(i.e.\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ și $L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}$ este definit pentru orice $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ și toate funcțiile simple $\sigma \in \mathbb{R}^2$ pentru care $\mu\{(\omega, u) \in \mathbb{R}^2 : \sigma(\omega, u) \neq 0\} < \infty$.

În următoarele enunțuri prezentăm câteva rezultate referitoare la proprietățile Schatten-von Neumann ale operatorului de localizare $L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, atunci când simbolul său σ este în $L^p(\mathbb{R}^2), 1 \leq p \leq \infty$.

Propoziția 3.3 *Fie $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^2)$ un simbol, fie $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ două funcții fereastră și fie α un parametru fracționar astfel încât $\alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Atunci, operatorul de localizare $L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ este în clasa Hilbert-Schmidt S_2 și*

$$\left\| L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} \right\|^2_{S_2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} \xi_n \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})},$$

unde $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ este o bază ortonormală a lui $L^2(\mathbb{R})$.

Propoziția 3.4 *Fie $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^2)$ un simbol, fie $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ două funcții fereastră și fie α un parametru fracționar astfel încât $\alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Atunci, operatorul de localizare $L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ este în clasa trace S_1 și*

$$\left\| L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} \right\|_{S_1} \leq \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\sigma\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

În următoarea propoziție enunțăm și demonstrăm un rezultat de compacitate referitor la operatorul de localizare $L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, în ipoteza că simbolul său $\sigma \in L^p(\mathbb{R}^2), 1 \leq p < \infty$.

Propoziția 3.5 *Fie $\sigma \in L^p(\mathbb{R}^2), 1 \leq p < \infty$ un simbol, fie $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ două funcții fereastră și fie α be un parametru fracționar astfel încât $\alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Atunci, operatorul de localizare $L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ este compact.*

Teorema 3.4 *Fie $\sigma \in L^p(\mathbb{R}^2), 1 \leq p \leq \infty$ un simbol, fie $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ două funcții fereastră și fie α be un parametru fracționar astfel încât $\alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Atunci, operatorul de localizare $L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ este în clasa Schatten-von Neumann S_p și*

$$\left\| L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} \right\|_{S_p} \leq (2\pi)^{\frac{1}{p'}} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^2)},$$

unde p' este indicele conjugat al lui p.

În următorul rezultat prezentăm o estimare bilaterală a normei în clasa trace a operatorului de localizare $L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, considerând simbolul $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Teorema 3.5 *Fie $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^2)$ un simbol, fie $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ două funcții fereastră și fie α un parametru fracționar astfel încât $\alpha \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Atunci, are loc următoare estimare*

$$\frac{1}{\pi \left(\|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \right)} \|\sigma_{\phi,\psi}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \left\| L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} \right\|_{S_1} \leq \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\sigma\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}, \tag{15}$$

unde $\sigma_{\phi,\psi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ este definit prin

$$\sigma_{\phi,\psi}(\omega, u) = \left(L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} \phi^{\alpha}_{\omega,u}, \psi^{\alpha}_{\omega,u} \right)_{L^2(\mathbb{R})}.$$

În propoziția următoare stabilim o formulă pentru urma $tr\left(L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\right)$ a operatorului de localizare $L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ în ipoteza că $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Propoziția 3.6 *În ipotezele Teoremei 3.4 rezultă că urma $tr\left(L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\right)$ a operatorului de localizare $L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}$ este dată de formula*

$$tr\left(L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\right) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sigma(\omega, u) \left(\psi^{\alpha}_{\omega,u}, \phi^{\alpha}_{\omega,u} \right)_{L^2(\mathbb{R})} d\omega du.$$

Observația 3.2 Dacă σ este o funcție reală pozitivă în $L^1(\mathbb{R}^2)$ și $\phi = \psi$, atunci estimările din relația (15) sunt sharp (precise).

În continuare formulăm și demonstrăm un rezultat referitor la norma în clasa trace S_1 a puterii n pentru produsul a doi operatori de localizare.

Propoziția 3.7 *Fie σ_1, σ_2 două funcții reale pozitive în $L^1(\mathbb{R}^2)$ și fie ϕ o funcție fereastră în $L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Presupunem că operatorii $L^{\alpha}_{\sigma_1,\phi,\phi} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ și $L^{\alpha}_{\sigma_2,\phi,\phi} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ comută unul cu celălalt, iar operatorul $L^{\alpha}_{\sigma_1,\phi,\phi} L^{\alpha}_{\sigma_2,\phi,\phi} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$*

este pozitiv. Atunci, operatorii liniari $L^{\alpha}_{\sigma_1,\phi,\phi}$, $L^{\alpha}_{\sigma_2,\phi,\phi}$ și $L^{\alpha}_{\sigma_1,\phi,\phi}L^{\alpha}_{\sigma_2,\phi,\phi}$ sunt pozitivi și aparțin clasei trace S_1. În plus,

$$\left\|\left(L^{\alpha}_{\sigma_1,\phi,\phi}L^{\alpha}_{\sigma_2,\phi,\phi}\right)^n\right\|_{S_1} \le \left\|L^{\alpha}_{\sigma_1,\phi,\phi}\right\|^n_{S_1}\left\|L^{\alpha}_{\sigma_2,\phi,\phi}\right\|^n_{S_1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

În subcapitolul 3.2 ne concentrăm atenția pe o nouă clasă de operatori de localizare de forma $\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ asociați transformatei Fourier α-ferăstrată, considerând β o funcție cu descreștere rapidă din spațiul Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

În următorul rezultat definim noua clasă de operatori de localizare $\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta}$: $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ asociați transformatei Fourier α-ferăstrată.

Definiția 3.9 *Fie $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^2) + L^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ un simbol, fie $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ două funcții fereastră (undine) admisibile, fie α un parametru fracționar astfel încât $\alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$ și fie $\beta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, unde $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ reprezintă spațiul Schwartz al funcțiilor cu descreștere rapidă pe $\mathbb{R}$. Atunci, operatorul de localizare asociat transformatei transformatei Fourier α-ferăstrată $\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ este definit prin*

$$\begin{aligned}\left(\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta} f, g\right)_{L^2(\mathbb{R})} &= \left(L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta} f, \overline{\beta} g\right)_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \sigma(\omega,u)\left(\overline{\beta} f, \phi^{\alpha}_{\omega,u}\right)_{L^2(\mathbb{R})}\left(\psi^{\alpha}_{\omega,u}, \overline{\beta} g\right)_{L^2(\mathbb{R})} d\omega du \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \sigma(\omega,u)\left(f, \beta\phi^{\alpha}_{\omega,u}\right)_{L^2(\mathbb{R})}\left(\beta\psi^{\alpha}_{\omega,u}, g\right)_{L^2(\mathbb{R})} d\omega du,\end{aligned} \tag{16}$$

pentru orice $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

Acești operatori ne-autoadjuncți amintesc de operatorii Landau–Pollak–Slepian întâlniți și în lucrările [22], [27], [30], [31] și [32].

Pentru operatorii introduși în relația (16) suntem interesați să studiem mărginirea și proprietățile Schatten-von Neumann. Un prim rezultat în acest sens este referitor la L^2-mărginirea operatorului de localizare $\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, atunci când simbolul $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Propoziția 3.8 *Fie $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^2)$ un simbol, fie $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ două funcții fereastră admisibile și fie α un parametru fracționar astfel încât $\alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Atunci, pentru orice funcție β din spațiul Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, operatorul de localizare $\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta}$: $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ este mărginit și*

$$\left\|\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta}\right\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))} \le \|\beta\|^2_{L^{\infty}(\mathbb{R})}\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\sigma\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Un rezultat referitor la L^2-mărginirea operatorului de localizare $\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, atunci când simbolul $\sigma \in L^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, este prezentată în următoarea propoziție.

Propoziția 3.9 *Fie $\sigma \in L^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ un simbol, fie $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ două funcții fereastră admisibile și fie α un parametru fracționar astfel încât $\alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Atunci, pentru orice funcție β din spațiul Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, operatorul de localizare $\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta}$: $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ este mărginit și*

$$\left\|\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta}\right\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))} \leq 2\pi \left\|\beta\right\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \left\|\phi\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\|\psi\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\|\sigma\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

În cadrul următoarei teoreme prezentăm un rezultat de mărginire în $L^2(\mathbb{R})$ pentru operatorul de localizare $\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, atunci când simbolul $\sigma \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 3.6 *Fie $\sigma \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq \infty$ un simbol, fie $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ două funcții fereastră admisibile și fie α un parametru fracționar astfel încât $\alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Atunci, pentru orice funcție fixată β din spațiul Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, există un unic operator de localizare liniar și mărginit $\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ astfel încât*

$$\left\|\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta}\right\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))} \leq (2\pi)^{\frac{1}{p'}} \left\|\beta\right\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \left\|\phi\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\|\psi\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\|\sigma\right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)},$$

unde p' este indicele conjugat al lui p $\left(i.e.\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$.

De asemenea, putem enunța și demonstra un rezultat referitor la apartenența operatorului de localizare $\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ la clasa trace S_1.

Teorema 3.7 *Fie $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^2)$ un simbol, fie $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ două funcții fereastră admisibile și fie α un parametru fracționar astfel încât $\alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Atunci, pentru orice funcție β din spațiul Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, operatorul de localizare $\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ este în clasa trace S_1 și*

$$\left\|\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta}\right\|_{\mathcal{S}_1} \leq \left\|\beta\right\|^4_{L^\infty(\mathbb{R})} \left\|\phi\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\|\psi\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\|\sigma\right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

În următorul rezultat prezentăm formula pentru urma $\mathrm{tr}\left(\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta}\right)$ a operatorului de localizare $\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

Propoziția 3.10 *Urma $tr\left(\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta}\right)$ a operatorului de localizare $\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ este dată prin*

$$tr\left(\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta}\right) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \sigma(\omega, u) \left(\beta\psi^{\alpha}_{\omega,u}, \beta\phi^{\alpha}_{\omega,u}\right)_{L^2(\mathbb{R})} d\omega du.$$

Un rezultat referitor la compacitatea operatorului de localizare $\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ este prezentat în continuare.

Propoziția 3.11 *Fie $\sigma \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq \infty$ un simbol, fie $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ două funcții fereastră admisibile și fie α un parametru fracționar astfel încât $\alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Atunci, pentru orice funcție β din spațiul Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, operatorul de localizare $\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ este compact.*

Considerând simbolul $\sigma \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq \infty$ și folosind teorema de interpolare Riez-Thorin pentru spațiile Lebesgue și clasele Schatten-von Neumann se poate demonstra că operatorul de localizare $\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ este în clasa Schatten-von Neumann S_p.

Propoziția 3.12 *Fie $\sigma \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \le p \le \infty$ un simbol, fie $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ două funcții fereastră admisibile și fie α un parametru fracționar astfel încât $\alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Atunci, pentru orice funcție β din spațiul Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, operatorul de localizare $\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ este în clasa Schatten-von Neumann S_p și*

$$\left\|\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta}\right\|_{S_p} \le (2\pi)^{\frac{1}{p'}} \|\beta\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^2)},$$

unde p' este indicele conjugat al lui p.

În următorul rezultat prezentăm o estimare bilaterală a normei în clasa trace a operatorului de localizare $\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, considerând simbolul $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Teorema 3.8 *Fie $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^2)$ un simbol, fie $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ două funcții fereastră admisibile și fie α un parametru fracționar astfel încât $\alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Atunci, are loc următoare estimare*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi\left(\|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right)} \|\sigma_{\phi,\psi}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &\le \left\|\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta}\right\|_{\mathcal{S}_1} \\ &\le \|\beta\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\sigma\|_{L^1(\mathbb{R}^2)},\end{aligned}$$

unde $\sigma_{\phi,\psi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ este dat prin

$$\sigma_{\phi,\psi}(\omega, u) = \left(\beta L^{\alpha}_{\sigma,\phi,\psi}\overline{\beta}\phi^{\alpha}_{\omega,u}, \psi^{\alpha}_{\omega,u}\right)_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Bibliografie selectivă

[1] L.B. Almeida, *The fractional Fourier transform and time-frequency representations*, IEEE Trans. Signal Process., vol. 42, 3084–3091, 1994.

[2] M. Bahri, F.A. Shah, A.Y. Tantary, *Uncertainty principles for the continuous shearlet transforms in arbitrary space dimensions*, Integ. Transf. Special Funct, 2020, https://doi.org/10.1080/10652469.2019.1707816.

[3] M. Bravo, H. Prado, E.G. Reyes, *Nonlinear pseudo-differential equations defined by elliptic symbols on $L^p(\mathbb{R}^n)$ and the fractional Laplacian*, arXiv:1611.09277v2[math.AP], 2018.

[4] M. Bravo-Vera, *Nonlinear equations of infinite order defined by an elliptic symbol*, Int. J. Math. Math. Sci., vol. 2014, Article ID656959, 7 pages.

[5] V. Catană, *Products of Two-Wavelet Multipliers and Their Traces*, Pseudo-Differential Operators: Complex Analysis and Partial Differential Equations, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 205, 195–211, Birkhäuser, Verlag, Basel, 2010.

[6] V. Catană, *Schatten–von Neumann norm inequalities for two-wavelet localization operators*, Pseudo-Differential Operators: Partial Differential Equations and Time-Frequency Analysis, Fields Institute Communications, vol. 52, 265–277, American Mathematical Society, 2007.

[7] V. Catană, *S-operators related to a finite measure space*, Appl. Anal., vol. 97, 326-339, 2018.

[8] V. Catană, *Z-operators related to a finite measure space*, J. Pseudo-Differ. Oper. Appl., vol. 9, 173-188, 2018.

[9] V. Catană, **I.M. Flondor**, H.G. Georgescu, *Generalized Fourier multipliers*, Ann. Funct. Anal., vol. 14, 34, 2023.

[10] V. Catană, **I.M. Flondor**, M.G. Scumpu, *α-Windowed Fourier transform (α-WFT)*, J. Pseudo-Differ. Oper. Appl., vol.15, 75, 2024.

[11] V. Catană, **I.M. Flondor**, M.G. Scumpu, *Localization operators related to α-windowed Fourier transform*, U.P.B. Sci. Bull., Series A, vol. 86, iss. 4, 2024.

[12] V. Catană, H.G. Georgescu, **I.M. Flondor**, *On a generalized class of nonlinear equations defined by elliptic symbols*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., vol. 47, article number 109, 2024.

[13] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, 1992.

[14] J. Du, M.W. Wong, *Traces of wavelet multipliers*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, vol. 23, 148-152, 2001.

[15] D. Gabor, *Theory of communications*, J. Inst. Electr. Eng., vol. 93, 429–457, 1946.

[16] P. Górka, H. Prado, E.G. Reyes, *On a general class of nonlocal equations*, Ann. Henri Poincaré, vol. 14, 947-966, 2013.

[17] K. Gröchenig, *Foundation of Time-Frequency Analysis*, Birkhäuser, Boston, 2001.

[18] X. Guanlei, W. Xiaotong, X. Xiaogang, *New inequalities and uncertainty relations on linear canonical transform revisit*, EURASIP J. Adv. Signal Process., Article ID: 563265, 7 pp, 2009.

[19] X. Guanlei, W. Xiaotong, X. Xiaogang, *Uncertainty inequalities for linear canonical transform*, IET Signal Process., vol. 3(5), 392–402, 2009.

[20] Z. He, M.W. Wong, *Wavelet multipliers and signals*, J. Austral. Math. Ser. B, vol. 40, 437-446, 1999.

[21] K.I. Kou, R.H. Xu, Y.H. Zhang, *Paley–Wiener theorems and uncertainty principles for the windowed linear canonical transform*, Math. Methods Appl. Sci., vol. 35, 2122–2132, 2012.

[22] H.J. Landau, H. O. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty*, II, Bell Syst. Tech. J., vol. 40, 65-84, 1961.

[23] S. Molahajloo, *Pseudo-differential operators on* $\mathbb{Z}$, B.-W. Schultze, M.W. Wong (eds.) Pseudo-Differential Operators: Complex Analysis and Partial Differential Equations, Birkhäuser, Basel, 213–221, 2010.

[24] S. Molahajloo, M.W. Wong, *Discrete Analogs of Wigner Transforms and Weyl Transforms*, Published in: Analysis of Pseudo-Differential Operators, Editors: S. Molahajloo, M.W. Wong, 1-20, Birkhäuser, 2019.

[25] S. Molahajloo, M.W. Wong, *Pseudo-differential operators on* S^1, L. Rodino, M.W. Wong (eds.) New Developments in Pseudo-Differential Operators, Birkhäuser, Basel, 297–306, 2008.

[26] S. Molahajloo, M.W. Wong, *Ellipticity, Fredholmness and spectral invariance of pseudo-differential operators on* S^1, J. Pseudo-Differ. Oper. Appl., vol. 1, 183–205, 2010.

[27] H.O. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty*, III, Bell Syst. Tech. J., vol. 41, 1295-1336, 1962.

[28] B.P. Rynne, M.A. Youngson, *Linear Functional Analysis*, Second Edition, Springer-Verlag, 2008.

[29] M.G. Scumpu, Teza de doctorat: *Transformări integrale timp-frecvență și operatori de localizare asociați acestor transformări*, București, 2024.

[30] D. Slepian, *On bandwidth*, Proc. IEEE, vol. 64, 292-300, 1976.

[31] D. Slepian, *Some comments on Fourier analysis, uncertainty and modeling*, SIAM Rev., vol. 25, 379-393, 1983.

[32] D. Slepian, H. O. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty*, I, Bell Syst. Tech. J., vol. 40, 43-64, 1961.

[33] H.M. Srivastava, A.F. Shah, A.Y. Tantary, *A family of convolution-based generalized Stockwell transforms*, J. Pseudo-Differ. Oper., vol. 11, 1505–1536, 2020.

[34] R. Tao, Y.L. Li, Y. Wang, *Uncertainty principles for linear canonical transforms*, IEEE Trans. Signal Process., vol. 57(7), 2856–2858, 2009.

[35] M.W. Wong, *Discrete Fourier Analysis*, Birkhäuser, 2011.

[36] M.W. Wong, *Wavelet Transforms and Localization Operators*, Birkhäuser, Boston, 2002, (Operator theory; Advances and Applications; vol. 136).

[37] M.W. Wong, *Weyl Transforms*, Springer-Verlag, New-York, Berlin-Heidelberg, 1998.

[38] M.W. Wong, Z. Zhang, *Trace class norm inequalities for wavelet multipliers*, Bulletin of the London Mathematical Society, vol. 34(6), 739-744, 2002.

[39] Y. Yang, K.I. Kou, *On uncertainty principles for hypercomplex signals in the linear canonical transform domains*, Signal Process., vol. 95, 67–75, 2014.

[40] K. Zhu, *Operator Theory in Function Spaces*, Marcel Dekker Inc., Pure and Applied Mathematics a Series of Monographs and Textbooks, vol. 139, New York, USA, 1990.